

19.09

Dans cette séance du cours, on va apprendre

- (i) la notion de SFL homogène et inhomogène;
- (ii) la notion de solution triviale d'un SFL homogène;
- (iii) le lien entre SFL homogènes et familles libres/liées;
- (iv) le lien entre $S_{(*)}$ pour $(*)$ SFL inhomogène et $S_{(*)_h}$ pour $(*)_h$ SFL homogène;
- (v) la notion d'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, image, préimage (ou image inverse) et le lien avec les SFL.

§ 3.3. SFL homogènes et inhomogènes

Déf 3.3 Un SFL (écrit sous forme matricielle) $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$
 est dit $\begin{cases} \rightarrow \text{homogène si } b=0 \text{ (i.e. } A\bar{x}=0) \\ \rightarrow \text{inhomogène si } b \neq 0 \text{ (i.e. } A\bar{x}=\bar{b} \text{ avec } b \neq 0) \end{cases}$

matrice $m \times n$ $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^m$

Rq. D Un SFL homogène $A \cdot \bar{x} = 0$ admet au moins une solution $\rightarrow$ c'est la solution triviale $\bar{x} = 0$.

Exemple 3.7* (modifiée) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

pivots $\rightarrow$ variables liées: x_1, x_2

$$\text{Alors } S(*) = \left\{ \begin{pmatrix} -3+x_3 \\ 1-2x_3-x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3-x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\uparrow$
sol. de ∇
 $A\bar{x} = b$

$\uparrow$
sol. de ∇
 $A\bar{x} = 0$
(*)

Point
clé

Pour $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$

$$\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \text{ liée} \iff [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \cdot \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m} \quad \text{admet une solution non triviale}$$

(Preuve) $\Rightarrow$ Si $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ liée, alors $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul et tels que

$$x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m} \xrightarrow[\text{aussi}]{\text{écrit}} [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m}$$

Comme $\bar{x} \neq 0$ vu qu'une composante de $\bar{x}$ est non nulle
 $\downarrow$
 $\bar{x}$ est sol. non triviale de $A\bar{x} = 0$.

$\Leftarrow$) Il faut renverser ces implications (exo). $\square$

Application $\rightarrow$ **Thm 3.9** Soit $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$. Si $p > m$, alors $\mathcal{F}$ est liée.

(Preuve) Soit $A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p]$. $\leadsto A \cdot \bar{x} = 0$ admet sol. non triviale ssi $\bar{v}$ est liée.

On va donc calculer la FER de

$$[A \mid 0] = [\underbrace{\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p}_{\substack{p \text{ colonnes} \\ m \text{ lignes} \ \& \ p > m}} \mid 0]$$

$\rightarrow$ alors au moins une colonne ne contient pas de pivot

$\leadsto$ alors il y a au moins une variable libre

$\Rightarrow$ les SEL $A \cdot \bar{x} = 0$ admet une infinité de sol $\Rightarrow$ on a une solution non triviale $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ est liée. $\square$

Thm 3.10 Soit $(*) A \bar{x} = \bar{b}$ un SEL inhomogène et soit $(*)_h A \cdot \bar{x} = 0$ le SEL homogène associé. Soit $\bar{v}_{\text{par}} \in \mathbb{R}^n$ une solution de $(*)$. Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \bar{v}_{\text{par}} + \bar{v}_h : \bar{v}_h \in S_{(*)_h} \right\}.$$

(Preuve) $\supseteq$ Si $\bar{v}_h \in S_{(*)_h}$, alors $A \cdot (\bar{v}_{\text{par}} + \bar{v}_h) = \underbrace{A \bar{v}_{\text{par}}}_{=\bar{b}} + \underbrace{A \cdot \bar{v}_h}_{=0} = \bar{b} \Rightarrow \bar{v}_{\text{par}} + \bar{v}_h \in S_{(*)}$.

$\subseteq$) Soit $\bar{v} \in S_{(*)}$, i.e. $A \bar{v} = \bar{b}$. On écrit $\bar{v} = \bar{v}_{\text{par}} + (\bar{v} - \bar{v}_{\text{par}})$ et

$A \cdot (\bar{v} - \bar{v}_{\text{par}}) = A \bar{v} - A \bar{v}_{\text{par}} = \bar{b} - \bar{b} = 0$, i.e. $\bar{v} - \bar{v}_{\text{par}} \in S_{(*)_h}$. $\leadsto \bar{v} \in S_{(*)}$ $\square$

Exemple 3.11 $(*) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -9 \end{cases}$

Admettons que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est sol. particulière.
Trouver toutes les sol. de $(*)$.

Par la méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow (-\frac{1}{5})L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivots : variables liées x_1, x_2

i.e. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow S(x_h) = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Thm 3.10.

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow S(*) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \square$$

synonyme de fonction

par

3.4. Applications linéaires

Déf 3.13 Une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite linéaire si $T(\bar{v} + \lambda \bar{w}) = T(\bar{v}) + \lambda T(\bar{w})$
pour tous $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cette déf et celle des notes de Sacha sont équivalentes (exercice).

Exemple E Par le Lemme 3.2, si A est matrice $m \times n$, alors l'application

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

est linéaire.

→ En fait "toutes" les applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont comme ça (à venir)

Exemple F L'application $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

est linéaire, car

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ x_3 + \lambda y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_2 + \lambda y_2) - 5(x_3 + \lambda y_3) \\ (x_1 + \lambda y_1) + (x_3 + \lambda y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 + \lambda(2y_2 - 5y_3) \\ (x_1 + x_3) + \lambda(y_1 + y_3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2y_2 - 5y_3 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Sinon: $T = T_A$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire? (Exemple 3.16)

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Réponse: Non, car

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Propriété Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire, $T(0) = 0$

(Preuve) $T(0) = T(0+0) = T(0+1 \cdot 0) \stackrel{T \text{ lin.}}{=} T(0) + 1 \cdot T(0) = T(0) + T(0)$

i.e. ~~$T(0) = T(0) + T(0)$~~ $\Rightarrow T(0) = 0$ $\square$

Déf 3.12 Pour une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on définit l'image de T via

$$\text{Img}(T) := \{ \bar{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \bar{w} = T(\bar{v}) \} = \{ T(\bar{v}) : \bar{v} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

($\text{Im}(T)$ dans les notes de Sacha)

On rappelle aussi que $\bar{w} = T(\bar{v})$ s'appelle image de $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ par T
et $\bar{v}$ s'appelle image inverse de $\bar{w} \in \mathbb{R}^m$ par T.
(ou préimage)

noter que le mot image a deux significations différentes.

Déf. A (rappel) Pour application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
et parties $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^m$ on définit

$$\begin{aligned} T(S) &:= \{ \bar{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \bar{v} \in S \text{ t.q. } T(\bar{v}) = \bar{w} \} \\ &= \{ T(\bar{v}) : \bar{v} \in S \} \end{aligned}$$

$$T^{-1}(S') := \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{v}) \in S' \}$$

image (directe) de S par T $\rightsquigarrow \text{Img}(T) = T(\mathbb{R}^n)$

image inverse (ou préimage, ou image réciproque) de S' par T

Dans ce langage : $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad \equiv \quad T_A(\bar{x}) = \bar{b}$

$(*)$ est compatible $\equiv \quad \bar{b} \in \text{Im}(T_A)$

$$S(*) = T_A^{-1}(\{\bar{b}\})$$

$$S_{(*)_h} = \underline{T_A^{-1}(\{\emptyset\})} \quad \leftarrow \text{noyau de } T_A \text{ (à venir)}$$